

Erste Klassenarbeit „lineare und quadratische Funktionen“



Aufgabe 1: Eine lineare Funktion $g(x)$ geht durch die Punkte $P_1(-3|3)$ und $P_2(5|-2)$.

- [4 Pkt] 1.1) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.
[4 Pkt] 1.2) Berechnen Sie die Schnittstellen mit den Koordinatenachsen.
[5 Pkt] 1.3) Der waagerechte Abstand zweier Funktionspunkte beträgt 4 LE. Wie viele Längeneinheiten ist der zweite Punkt in y -Richtung entfernt (senkrechter Abstand der Punkte)?

Aufgabe 2: Der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion befindet sich bei $S(1|2)$ und die Funktion schneidet die x -Achse an der Stelle $x = -1$.

- [4 Pkt] 2.1) Bestimmen Sie die Normalform dieser Funktion.
[4 Pkt] 2.2) Berechnen Sie die zweite Schnittstelle mit der x -Achse.
[6 Pkt] 2.3) Berechnen Sie den ungefähren Wert für die Tangentensteigung des Funktionsgraphen an der Stelle, an der die Funktion die y -Achse schneidet.

Aufgabe 3: Eine quadratische Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = 4$ eine Nullstelle und schneidet die y -Achse bei $y = -4$. Der Punkt $P(6|-1)$ gehört zur Funktion $f(x)$.

- [10 Pkt] 3.1) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.
[5 Pkt] 3.2) Überprüfen Sie, ob diese Funktion eine zweite Schnittstelle mit der x -Achse besitzt.

Aufgabe 4: Für die quadratische Funktion $f_1(x) = -x^2 - 2$ kann zunächst keine Nullstelle berechnet werden. Die Gerade $g(x)$ schneidet die y -Achse an der Stelle $y = -2$ mit der Steigung $m = \frac{3}{4}$. Der Scheitelpunkt der Parabel wird nun verschoben, so dass die verschobene quadratische Funktion Nullstellen hat bei $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$.

- [3 Pkt] 4.1) Skizzieren Sie die beschriebene Situation.
[5 Pkt] 4.2) Überprüfen Sie, ob der Scheitelpunkt der verschobenen Parabel auf der Gerade $g(x)$ liegt.

Lösungen

Aufgaben 1 bis 4



Aufgabe 1.1)

$$g(x) = m \cdot x + b, \quad P_1(-3|3) \text{ und } P_2(5|-2)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 3}{5 - (-3)} = \frac{-5}{8}$$

$$f(-3) = -3$$

$$3 = \frac{-5}{8} \cdot (-3) + b$$

$$b = \frac{9}{8}$$

$$f(x) = -\frac{5}{8} \cdot x + \frac{9}{8} = -0,625 \cdot x + 1,125$$

Aufgabe 1.2)

Schnittstelle mit der x-Achse

$$f(x_s) = 0$$

$$0 = -\frac{5}{8}x_s + \frac{9}{8} \Rightarrow x_s = -\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{-5} = \frac{9}{5}$$

$$x_s = \frac{9}{5} = 1,8$$

Schnittstelle mit der y-Achse

$$f(0) = y_s$$

$$y_s = -\frac{5}{8} \cdot (0) + \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$$

$$y_s = \frac{9}{8} = 1,125$$

Aufgabe 1.3)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{8}, \quad \Delta x = 4 \text{ LE}$$

$$\frac{\Delta y}{4 \text{ LE}} = \frac{-5}{8} \Rightarrow \Delta y = \frac{-5 \cdot (4 \text{ LE})}{8} = \frac{-20 \text{ LE}}{8} = |-2,5 \text{ LE}|$$

$\Delta y = 2,5 \text{ LE}$, d.h. der zweite Punkt ist in y-Richtung 2,5 LE entfernt!

Aufgabe 2.1)

Scheitelpunkt $S(x_S | y_S) = S(1 | 2)$ und Nullstelle bei $x = -1$

Scheitelform: $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

$$f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + 2$$

$f(-1) = 0$ wg. Nullstelle bei $x = -1$

$$0 = a \cdot (-1 - 1)^2 + 2 = a \cdot (-2)^2 + 2$$

$$a = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Scheitelpunktform:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot [x^2 - 2x + 1] + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2}$$

normale Form einer quadr. Funktion:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

Aufgabe 2.2)

Nullstellen bei $f(x_n) = 0$

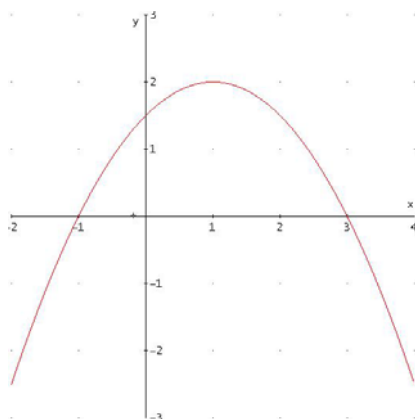
$$0 = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

$$0 = x^2 - 2x - 3$$

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1 + 3} = 1 \mp 2$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

Die zweite Nullstelle ist bei $x_2 = 3$



Aufgabe 2.3)

$$\text{Tangentensteigung } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad P_1(0|1,5) \text{ und } P_2(x_2|y_2)$$

$$\text{gewählt: } \Delta x = 0,1$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 0 + 0,1 = 0,1$$

$$y_2 = f(x_2) = f(0,1) = -\frac{1}{2} \cdot (0,1)^2 + (0,1) + \frac{3}{2} = \frac{319}{200} = 1,595$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta x} = \frac{1,595 - 1,5}{0,1} \approx 1$$

Die Tangentensteigung beträgt $m \approx 1$

**Aufgabe 3.1)**

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

bekannt ist:

$$f(0) = -4 \quad \text{wg. } y\text{-Achsenschnittstelle bei } y = -4$$

$$f(4) = 0 \quad \text{wg. } x\text{-Achsenschnittstelle bei } x = 4$$

$$f(6) = -1 \quad \text{wg. Punkt } P(6|-1)$$

Gleichungssystem:

$$f(0) = -4 \Rightarrow c = -4$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow 16a + 4b - 4 = 0 \Rightarrow 16a + 4b = 4$$

$$f(6) = -1 \Rightarrow 36a + 6b - 4 = -1 \Rightarrow 36a + 6b = 3$$

$$\left| \begin{array}{l} 16a + 4b = 4 \\ 36a + 6b = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -8a - 2b = -2 \\ 12a + 2b = 1 \end{array} \right| \Rightarrow |4a = -1| \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\left| 16 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 4b = 4 \right| \Rightarrow |4b = 8| \Rightarrow b = 2$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$$

Aufgabe 3.2)

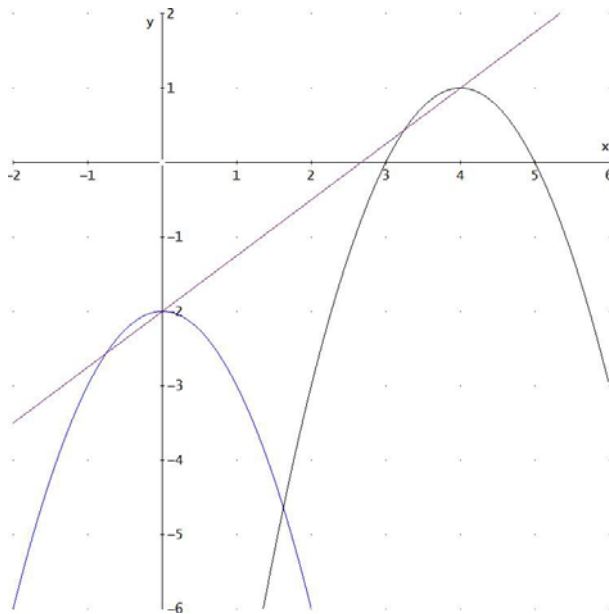
Nullstellen bei $f(x_n) = 0$

$$0 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 - 8x + 16$$

$$x_{1,2} = 4 \mp \sqrt{16 - 16} = 4 \mp 0$$

Die Funktion $f(x)$ hat nur eine Nullstelle bei $x = 4$!

Aufgabe 4.1)**Aufgabe 4.2)**

Die Parabel $f(x) = -x^2 - 2$ öffnet nach "unten", sie hat keine Nullstellen.

Die Gerade $g(x)$ hat eine Steigung von $m = \frac{3}{4}$ und geht bei $y = -2$ durch die y -Achse.

Deshalb gilt: $g(x) = \frac{3}{4} \cdot x - 2$

Die verschobene quadratische Funktion $f_v(x)$ hat einen neuen Scheitelpunkt.

Die Form der Parabel entspricht der Funktion f .

Aufgrund der beiden Nullstellen der verschobenen Parabel $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ kann f_v auch mithilfe der zu den Nullstellen gehörenden Linearfaktoren beschrieben werden:

$f_v(x) = -1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)$ nach Ausmultiplizieren also

$f_v(x) = -x^2 + 8x - 15$



Die Parabel f_v ist symmetrisch zu einer Linie durch den Scheitelpunkt $S(x_s | y_s)$ und diese Symmetrielinie verläuft in der Mitte zwischen den Nullstellen.

$$\text{Deshalb gilt: } x_s = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = 3 + \frac{5 - 3}{2} = 4$$

$$x_s = 4$$

$$y_s = f_v(x_s) = f_v(4)$$

$$y_s = -(4)^2 + 8 \cdot (4) - 15 = 1$$

$$y_s = 1$$

Der Scheitelpunkt der verschobenen Parabel ist $S(4 | 1)$

Wenn der Scheitelpunkt Element der Gerade $g(x)$ ist, dann gilt:

$$g(x_s) = f_v(x_s) = 1 !!!$$

$$g(x_s) = g(4) = \frac{3}{4} \cdot (4) - 2 = 1$$

Der Scheitelpunkt liegt auf der Gerade $g(x)$!