Aufgabenblatt 5-2
„Extremwertaufgaben II"

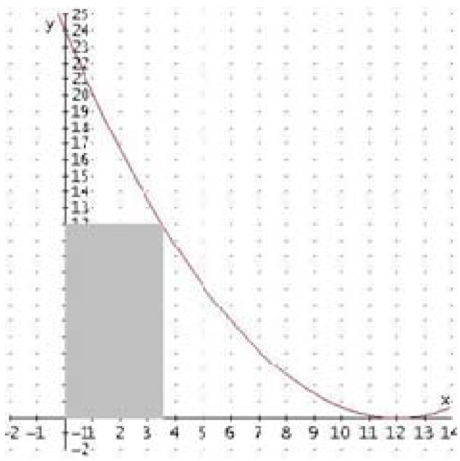
Aufgabe 1: Ein Grundstück wird nach einem neuen Bebauungsplan einseitig durch eine Umgehungsstraße begrenzt. Die anderen Seiten des Grundstückes bilden zwei rechtwinklige Straßen. Der Verlauf des Straßenrandes der Umgehungsstraße kann beschrieben werden mithilfe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 4x + 24$$

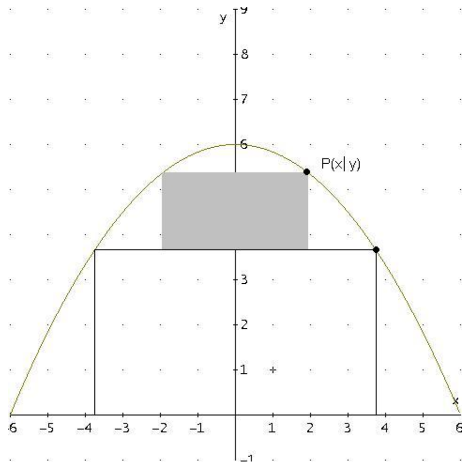
Auf das neu entstandene Grundstück soll ein rechteckiger Schuppen mit möglichst großer Grundfläche gebaut werden, wobei eine Ecke den Straßenrand der Umgehungsstraße berührt, zwei andere Seiten liegen entlang der rechtwinkligen Straßen (siehe Skizze 1, graue Fläche).

1.1) Berechnen Sie die Schuppenfläche, wenn der Eckpunkt bei $P(5 \mid y_P)$ liegt.

1.2) Bestimmen Sie die größtmögliche Schuppenfläche.



Skizze 1 zu Aufgabe 1



Skizze 2 zu Aufgabe 2

Aufgabe 2: In einem parabelförmigen Tunnelprofil ist ein rechteckiges Durchfahrprofil mit größtmöglichem Querschnitt eingebaut. Das Tunnelprofil kann sehr gut beschrieben werden mithilfe der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 6$$

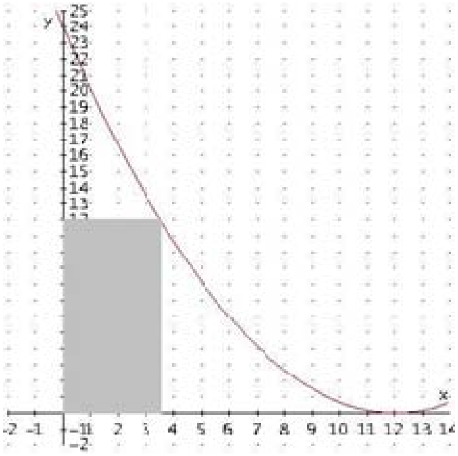
Über diesem Rechteckquerschnitt soll ein rechteckiger Lüftungsschacht mit maximalem Querschnitt (siehe Skizze 2, graue Fläche) montiert werden.

2.1) Bestimmen Sie die Durchfahrhöhe y_D, wenn das Durchfahrprofil die maximale Querschnittsfläche hat.

2.2) Bestimmen Sie Koordinaten des Punktes P, wenn der Lüftungsschacht die maximale Querschnittsfläche hat und berechnen Sie die größtmögliche Fläche dieses Schachtes.

Lösungen Aufgabenblatt 5-2

Aufgabe 1



1.1) Schuppengrundfläche für P_1

$P_1(5\,|\,y_{P1})$

$A_{P1} = x_{P1} \cdot y_{P1}$

$y_{P1} = f(5);\quad wg.\ P_1(5\,|\,y_{P1})$

$$y_{P1} = \frac{1}{6}(5)^2 - 4\cdot(5) + 24$$

$$y_{P1} = \frac{49}{6}\ LE \approx 8{,}17\ LE$$

$A_{P1} = x_{P1} \cdot y_{P1} = 5\,LE \cdot 8{,}17\,LE = 40{,}83\,FE$

1.2) Maximale Grundfläche des Schuppens

Hauptbedingung

$A(x,y) = x \cdot y$

Nebenbedingung

$y = f(x)$

$$y = \frac{1}{6}\cdot x^2 - 4\cdot x + 24$$

Zielfunktion

$$A(x) = x\cdot\left(\frac{1}{6}x^2 - 4x + 24\right)$$

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x^2 + 24x$$

Bestimmen der Maximalstelle x_E

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x^2 + 24x$$

$$A'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 24$$

$A''(x) = x - 8$

$A'(x_E) = 0\ \ (waagerechte\ Tangente\ an\ der\ Stelle\ x_E\ !!)$

$$A'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 24$$

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 24$$

$$0 = x^2 - 16x + 48$$

$$x_{E1/E2} = 8 \mp \sqrt{64 - 48} = 8 \mp \sqrt{16} = 8 \mp 4$$

$$x_{E1} = 4 \quad und \quad x_{E2} = 12$$

Krümmungsverhalten (κ) *an den Extremstellen*

$$A''(x) = x - 8$$

$$\kappa = \operatorname{sgn}\left[A''(x_E)\right]$$

$$\kappa_{E1} = \operatorname{sgn}[\ 4 - 8] = \operatorname{sgn}[-4] = -1 \quad konvex$$

$$\kappa_{E2} = \operatorname{sgn}[12 - 8] = \operatorname{sgn}[+4] = +1 \quad konkav$$

gesucht ist ein Maximum, also ein Hochpunkt mit konvexem Krümmungsverhalten!

Bei $x_{E1} = 4$ *LE ist die Maximalstelle!*

Berechnen der maximalen Grundfläche

$$A(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x^2 + 24x$$

$$A_{\max} = A(x_{E1}) = A(4)$$

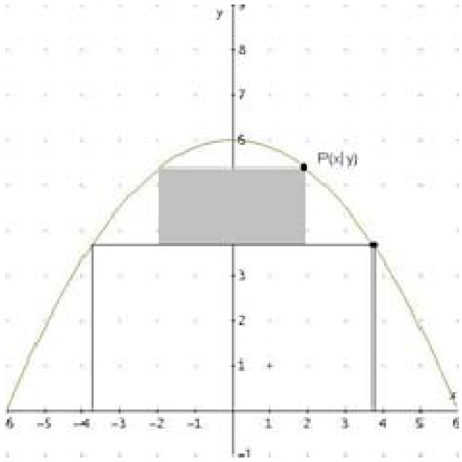
$$A_{\max} = \frac{1}{6}(4)^3 - 4\cdot(4)^2 + 24\cdot(4)$$

$$A_{\max} = \frac{128}{3}\ FE \approx 42{,}7\ FE$$

Die maximale Grundfläche des Schuppens beträgt ca. 42,7 FE !!

Aufgabe 2

2.1) Höhe des maximalen Durchfahrprofils (y_D)



Hauptbedingung

$$A_D(x,y) = 2 \cdot x_D \cdot y_D$$

Nebenbedingung

$$y = f(x)$$

$$y = -\frac{1}{6} \cdot x^2 + 6$$

Zielfunktion

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot (-\frac{1}{6}x^2 + 6)$$

$$A(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 12x$$

Bestimmen der Maximalstelle x_E

$$A(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 12x$$

$$A'(x) = -x^2 + 12$$

$$A''(x) = -x$$

$$A'(x_E) = 0 \;\; (waagerechte\,Tangente\,an\,der\,Stelle\,x_E\,!!)$$

$$A'(x) = -x^2 + 12$$

$$0 = -x^2 + 12$$

$$x_{E1/E2} = \mp\sqrt{12} = \mp 3{,}46$$

$$x_{E1} = -3{,}46 \quad und \quad x_{E2} = 3{,}46$$

Krümmungsverhalten (κ) an den Extremstellen

$$A''(x) = -x$$

$$\kappa = \mathrm{sgn}\left[A''(x_E)\right]$$

$$\kappa_{E1} = \mathrm{sgn}\left[-x_{E1}\right] = \mathrm{sgn}\left[+3{,}46\right] = +1 \quad konkav$$

$$\kappa_{E2} = \mathrm{sgn}\left[-x_{E2}\right] = \mathrm{sgn}\left[-3{,}46\right] = -1 \quad konvex$$

gesucht ist ein Maximum, also ein Hochpunkt mit konvexem Krümmungsverhalten!

Bei $x_{E2} = 3{,}46$ LE ist die Maximalstelle!

Maximale Durchfahrhöhe (y_D)

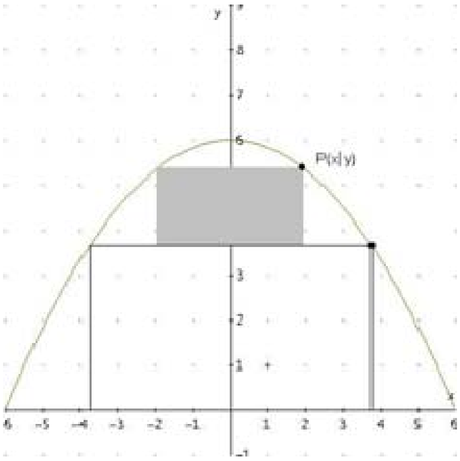
$y_D = f(x_{E2})$

$y_D = -\frac{1}{6}\cdot(3{,}46)^2 + 6$

$y_D = 4\,LE$

Die Durchfahrhöhe bei größtmöglicher Querschnittsfläche beträgt 4 LE !!

2.1) Koordinaten des Punktes P für das größtmögliche Lüftungsprofil



Hauptbedingung

$A_L(x,y) = 2\cdot x_L\cdot y_L$

Nebenbedingung

$y_L = f(x_L) - y_D$

$y_D = 4$

$y_L = -\frac{1}{6}\cdot x^2 + 6 - 4$

$y_L = -\frac{1}{6}\cdot x^2 + 2$

Zielfunktion

$A(x) = 2\cdot x\cdot(-\frac{1}{6}x^2 + 2)$

$A(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

Bestimmen der Maximalstelle x_E

$A(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$

$A'(x) = -x^2 + 4$

$A''(x) = -x$

$A'(x_E) = 0 \quad (waagerechte\,Tangente\,an\,der\,Stelle\,x_E\,!!)$

$A'(x) = -x^2 + 4$

$0 = -x^2 + 4$

$x_{E1/E2} = \mp\sqrt{4} = \mp 2$

$x_{E1} = -2 \quad und \quad x_{E2} = 2$

Krümmungsverhalten (κ) *an den Extremstellen*

$A''(x) = -x$

$\kappa = \operatorname{sgn}\left[A''(x_E)\right]$

$\kappa_{E1} = \operatorname{sgn}\left[-x_{E1}\right] = \operatorname{sgn}\left[+2\right] = +1 \quad konkav$

$\kappa_{E2} = \operatorname{sgn}\left[-x_{E2}\right] = \operatorname{sgn}\left[-2\right] = -1 \quad konvex$

gesucht ist ein Maximum, also ein Hochpunkt mit
konvexem Krümmungsverhalten!
Bei $x_{E2} = 2$ *LE ist die Maximalstelle!*

Koordinaten des Punktes P $(P(x\,|\,y))$

$y = f(x_{E2})$

$y = -\frac{1}{6}\cdot(2)^2 + 6$

$y = \frac{16}{3} \approx 5{,}3$

$P(2\,|\,5{,}3)$

Die Koordinaten des Punktes sind $P\left(2\,\middle|\,\frac{16}{3}\right)$

2.2) Maximale Querschnittsfläche des Lüftungsschachtes

$A_{\max} = A(x_{E2}) = -\frac{1}{3}(2)^3 + 4\cdot(2)$

$A_{\max} = \frac{16}{3}\,FE \approx 5{,}3\,FE$

Die größtmögliche Querschnittsfläche des Lüftungsschachtes beträgt

$A_{\max} = \frac{16}{3}\,FE \approx 5{,}3\,FE$